1/ Espace vectoriel normé

a/ Norme sur E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

Définition : Une norme sur E est toute application N notée $\|\cdot\|$ définie de E vers $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les 3 propriétés suivantes :

i/ $N(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ii/ $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

iii/ $N(x+y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall x \in E, \ \forall y \in E$

le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé

b/ Exemples :

* $\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^+ \\ z &\to |z| \end{aligned}$ est une norme sur $\mathbb{C}$

* Normes usuelles définies sur $\mathbb{R}^n = \{x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \ , x_i \in \mathbb{R}\}$

$N_1(x) = \|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$; $N_2(x) = \|x\|_2 = |x_1| + \dots + |x_n|$; $N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

c/ Normes équivalentes

Déf : N et N' sont 2 normes équivalentes $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0$ et $\beta > 0 \ / \ \forall x \in E : \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$

Exemples : On montre que les normes $\| \ \|_1, \| \ \|_2, \| \ \|_\infty$ sont 2 à 2 équivalentes

En effet : $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$; $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n\, \|x\|_\infty$; $\frac{1}{n} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$

2/ Espace métrique

a/ Distance : E ensemble non vide

Définition : Toute application d définie de $E \times E$ vers $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les 3 propriétés : $\forall x, y, z \in E$

i/ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ii/ $d(x,y) = d(y,x)$ iii/ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

est appelée distance sur E et le couple (E, d) s'appelle espace métrique

Exemples : * $\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\to |x-y| \end{aligned}$ est une distance sur $\mathbb{R}$

* Distance usuelle sur $\mathbb{R}^n$

$d_1(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$; $d_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$; $d_\infty(x,y) = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

b/ Distance associée à une norme

Soit $(E, \| \ \|)$ est un espace normé alors E est un espace métrique muni de la distance d définie par : $d(x,y) = \|x-y\|$

c/ Distances équivalentes

Déf : 2 distances d et d' sont équivalentes $\Leftrightarrow \exists \alpha>0$ et $\beta>0$ / $\alpha d \leq d' \leq \beta . d$

Exemples : d_1, d_2 et d_∞ sont équivalentes : $d_\infty \leq d_1 \leq d_2 \leq n . d_\infty$

3/ Ouvert ; fermé ; Voisinage

a/ Boule ouverte, Boule fermée ; Sphère : (E,d) espace métrique

$B(a,r)=\{x\in E \; ; \; d(x,a)<r\}$; $B'(a,r)=\{x\in E ; d(x,a)\leq r\}$ $S(a,r)=\{x\in E ; d(x,a)=r\}$

Exemple : * $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y)=|x-y|$

$B(a,r)=]a-r, a+r[$ $\quad B'(a,r)=[a-r,a+r]$ $\quad S(a,r)=\{a-r, a+r\}$

* Dans $\mathbb{R}^2$: $B_1(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2, d_1(x,0)<1\}$ est le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 ; $B_2(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2 ; d_2(x,0)<1\}$ est un losange

$B_\infty(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2, d_3(x,0)<1\}$ est un carrée

b/ Ouvert : $U \subset E$ est dit ouvert $\Leftrightarrow \forall x\in U : \exists r>0 : B(x,r)\subset U$

c/ Fermé : $F\subset E$ est dit fermé $\Leftrightarrow F^c$ ouvert $\Leftrightarrow \forall x\in F : \forall r>0 : B(x,r)\cap F\neq\emptyset$

d/ Voisinage : V voisinage de $x\in E \Leftrightarrow \exists U$ ouvert : $x\in U\subset V$

$\Leftrightarrow \exists r>0 \; : \; B(x,r)\subset V$

4/ Suite de points d'un espace métrique (E,d)

a/ Convergence : la suite (x_n) converge vers ℓ dans (E,d) si et ssi

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \; / \; \forall n\in\mathbb{N} \; : n>N \Rightarrow d(x_n,\ell)<\varepsilon$

b/ Suite de Cauchy : la suite (x_n) est dite de Cauchy si et ssi

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \; / \; \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2 : \; p>q>N \Rightarrow d(x_p,x_q)<\varepsilon$

c/ Proposition : Toute suite convergente dans (E,d) est de Cauchy

d/ Espace métrique complet : Un espace métrique est dite complet si toute suite de Cauchy de E est convergente

Exemple : $\mathbb{R}^n$ muni des distance usuelle est un espace métrique complet

5/ Fonction continue dans 1 espace métrique : (E,d) et (F,d') deux espaces métriques ; f application de E dans F ; $a\in E$

Déf : f continue en $a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \; \exists\alpha>0 \; / \; \forall x\in E \quad d(x,a)<\alpha \Rightarrow d(f(x),f(a))<\varepsilon$

Propriété : les 3 propositions suivantes sont équivalentes : a/ f continue en a

b/ $\forall V'$ voisinage de $f(a)$ $\exists V$ voisinage de a / $f(V)\subset V'$ $\quad$ c/ $\forall B'(f(a),\varepsilon) ; \exists B(a,\alpha)$ telque $f(B)\subset B'$

Proposition :

$\mathring{A} = \{x \in A ;\ \exists \varepsilon > 0 ;\ B(x,\varepsilon) \subset A\}$. $\bar{A} = \{x \in A ;\ \forall \varepsilon > 0 ;\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$

Propriétés sur les ouverts et les fermés

- la reunion (l'intersection) d'une famille qcq d'ouverts (fermés) est un ouvert (fermé)
- la reunion (l'intersection) d'une famille finie de fermés (ouverts) est un fermé (ouvert)
- En général : l'intersection qcq d'ouverts n'est pas un ouvert et la reunion qcq de fermés n'est pas un fermé

Exemples : Sur $(\mathbb{R}, d)$; $d(x,y) = |x-y|$

$A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$; $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{0\}$; $B_n = [\frac{1}{n}, 1]$; $\bigcup_{n \geq 1} B_n =]0,1]$

a/ $\mathring{A} \subset A$: evident par déf car $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A

Autre dem : Soit O_i ouvert inclu dans A càd $O_i \subset A$

$\Rightarrow \bigcup O_i \subset A$ càd $\mathring{A} \subset A$

b/ $A = \mathring{A} \Leftrightarrow A$ ouvert

$\Rightarrow$ evident par déf : $\mathring{A}$ est la reunion de tous les ouverts inclus dans A donc $\mathring{A}$ est un ouvert

Or $A = \mathring{A}$ alors A est un ouvert

$\Leftarrow$/ . $\mathring{A} \subset A$ d'après a/

. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A et A ouvert contenu dans A donc $A \subset \mathring{A}$ et par suite $A = \mathring{A}$

c/ par definition $\mathring{A}$ est un ouvert et d'après b/ : $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

d/ Soit $x \in \mathring{A}$ alors $\exists O$ ouvert / $O \subset A$ et $x \in O$

Or $A \subset B$ donc $x \in O \subset B$ $\Rightarrow x \in \mathring{B}$

Ainsi $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

e/ $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

- On a $A\cap B \subset A$ et $A\cap B \subset B$ donc d'après d/
$\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} \subset \mathring{A}$ et $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} \subset \mathring{B}$ d'où $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$
- $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A\cap B$ (car $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$)
par déf $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A\cap B$
donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A\cap B}}$

f/ $A \subset \overline{A}$: evident par déf : $\overline{A}$ le plus fermé contenant A
Autre dem : Soit F_i un fermé contenant A càd $A \subset F_i$
alors $A \subset \cap F_i$ ~~$= A$~~ d'où $A \subset \overline{A}$

g/ $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ est un fermé
$\Rightarrow$/ evident par déf : $\overline{A}$ fermé et $A = \overline{A} \Rightarrow A$ fermé
$\Leftarrow$/ • $A \subset \overline{A}$ d'après f
- $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A et A est un fermé $\Rightarrow \overline{A} \subset A$

h/ $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
$\overline{A}$ est un fermé et d'après g/ on a : $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

i/ $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A et $\overline{B}$ est un fermé contenant B or $A \subset B$ donc $\overline{B}$ est un fermé contenant A d'où $\overline{A} \subset \overline{B}$

j/ $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \subset A\cup B$ et $B \subset A\cup B$ donc d'après i/ $\overline{A} \subset \overline{A\cup B}$
et $\overline{B} \subset \overline{A\cup B}$ d'où $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A\cup B}$
- $\overline{A\cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A\cup B$
Or $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A\cup B$ (car $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$)
d'où $\overline{A\cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$